

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

$$1. \int_{\alpha}^{\beta} \frac{a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_1 x + a_0}{x^{\mu}} dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{a_v x^v}{x^{\mu}} dx + \int_{\alpha}^{\beta} \frac{a_{v-1} x^{v-1}}{x^{\mu}} dx + \dots + \int_{\alpha}^{\beta} \frac{a_1 x}{x^{\mu}} dx + \int_{\alpha}^{\beta} \frac{a_0}{x^{\mu}} dx$$

i. $\int_1^2 \frac{x^3 - 3x^2 + x + 4}{x^2} dx$

ii. $\int_2^3 \frac{x^3 + 5}{x^2} dx$

iii. $\int_1^2 \frac{x^3 - 3x^2 + x + 4}{x^4} dx$

iv. $\int_1^2 \frac{x^3 - 3x^2 + x + 4}{x^3} dx$

$$2. \int_{\alpha}^{\beta} \frac{P'(x)}{P(x)} dx = [\ln P(x)]_{\alpha}^{\beta}$$

i. $\int_1^2 \frac{2x-1}{x^2-x-2} dx$

ii. $\int_0^1 \frac{3x^2+6}{x^3+6x+10} dx$

iii. $\int_0^1 \frac{4x+7}{x^2+x-6} dx$

iv. $\int_8^9 \frac{x+7}{x-6} dx$

v. $\int_0^1 \frac{4x+8}{x^2+4x+6} dx$

vi. $\int_0^1 \frac{x-1}{x^2-2x+56} dx$

vii. $\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx$

viii. $\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^3+3x+8} dx$

ix. $\int_0^1 \frac{x^2}{x^3+1} dx$

3. $\int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)} dx$, βαθμός αριθμητή < βαθμός παρανομαστή

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} + \frac{\Gamma}{x-x_3} + \dots \quad \text{όπου } x_1, x_2, x_3, \dots \text{ρίζες πραγματικές απλής πολλαπλότητας}$$

i. $\int_0^1 \frac{2x+3}{x^2+3x+5} dx$

iii. $\int_{-2}^{-1} \frac{x+1}{x^3+x^2-6x} dx$

v. $\int_6^2 \frac{3}{x^2-5} dx$

ii. $\int_{-1}^0 \frac{x+5}{x^2+x-2} dx$

iv. $\int_0^1 \frac{1}{x^2-4} dx$

4. $\int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)} dx$, βαθμός αριθμητή < βαθμός παρανομαστή

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{(x-x_1)^2} + \frac{\Gamma}{x-x_2} + \dots \quad \text{όπου } x_1 \text{ ρίζα πραγματική και πολλαπλή}$$

i. $\int_2^e \frac{2x^2-3x+3}{x^3-2x^2+x} dx$

ii. $\int_2^3 \frac{x}{(x-1)^4} dx$

iii. $\int_2^3 \frac{dx}{x(x-1)^2}$

5. $\int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)} dx$, βαθμός αριθμητή \geq βαθμός παρανομαστή

Εκτελούμε την ευκλείδεια διαίρεση πολωνύμων (Άλγεβρα Β Λυκείου)

και καταλήγουμε σε ένα ολοκλήρωμα πολωνύμων και ένα ολοκλήρωμα που ανάγεται σε προηγούμενη μορφή

i. $\int_3^4 \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} dx$

iii. $\int_0^1 \frac{x^2}{x^2-4} dx$

ii. $\int_0^1 \frac{2x^3+7x^2+12x+9}{x^2+3x+2} dx$

iv. $\int_3^4 \frac{x^3}{x^2-x-2} dx$

6. Με αντικατάσταση και ρητή.....

i. $\int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{e^{2x} - e^x - 2} dx$

ii. $\int_1^2 \frac{x^2 + 1}{(2x + 1)^2} dx$

iii. $\int_0^{\pi/2} \frac{\eta \mu x}{\sigma \upsilon \nu^2 x + 4 \sigma \upsilon \nu x + 3} dx$

iv. $\int_1^{64} \frac{1}{\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x}} dx$

v. $\int_0^1 \frac{1}{1 + e^x} dx$

vi. $\int_1^2 \frac{x^2}{(2x - 1)^5} dx$

vii. $\int_0^{\pi/6} \frac{\epsilon \phi^2 x + 1}{\epsilon \phi^2 x - 1} dx$

viii. $\int_0^{11} \frac{x}{x^4 + 3x^2 + 2} dx$

ix. $\int_2^3 \frac{x}{(x - 1)^4} dx$

7. ΕΞΩ ΑΠΟ ΚΛΑΣΣΙΚΕΣ ΝΟΡΜΕΣ

i. $\int_0^1 \frac{x}{x^2 + 2x + 1} dx$

ii. $\int_2^3 \frac{1}{(1 - x^2)^2} dx$

iii. $\int_0^1 \frac{x^3}{(2 + x^2)^2} dx$

iv. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\eta \mu x} dx$

8. Όταν ο παρονομαστής δεν έχει πραγματικές ρίζες τότε οδηγούμαστε σε κατάλληλη τριγωνομετρική αντικατάσταση

i. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 1} \rightarrow \text{Θέτουμε } \epsilon \phi u = x$

ii. $\int_{-1}^0 \frac{3x - 1}{x^2 + 2x + 2} dx \rightarrow \text{Θέτουμε } \epsilon \phi u = x + 1$